Modelagem Matemática de uma Máquina Extrusora de Borracha



Allan Christian Krainski Ferrari[1]; Douglas Antonio Firmino Pelacini[2]; Pedro Furtado G. Silva[2]; Vitor Hugo K. Lima[1];

[1] UNIFACEAR – Centro Universitário; [2] Universidade Federal do Paraná

RESUMO

O presente trabalho foi apresentado junto a disciplina de Sistemas de Controle I do curso de engenharia elétrica da faculdade FACEAR. Como objetivo principal, este estudo visa apresentar o processo de modelagem matemática para obtenção de uma função de transferência que represente na prática o comportamento de um processo industrial. Para isto, foram coletados em tempo real uma série de dados de dados de entrada e saída gerados por uma máquina extrusora durante o processo de produção de borracha para a fabricação de pneus. A série de dados de entrada representa a espessura da borracha, enquanto que a série dos dados de saída representa a velocidade da esteira. Para a modelagem matemática, foi utilizado o software MATLAB® para a obtenção de diferentes modelos de funções transferências em função da variável complexa "s". Os diversos modelos de funções de transferência obtidas representam o comportamento real da máquina extrusora. Nos resultados está apresentado o modelo matemático mais adequado através da estimação e validação dos parâmetros do mesmo.

Palavras chave: modelagem matemática, função transferência, extrusora.

ABSTRACT

The present work was presented associated with the discipline of Control Systems I of the electrical engineering course of FACEAR college. This study aims to present the process of mathematical modeling to obtain a transfer function that represents in practice the behavior of an industrial process. For this, a series of input and output dates were collected in real time being generated by an extruder during the production process of rubber for the manufacture of tires. The input data represents the thickness of the rubber, while the output data represents the speed of the conveyor belts. For mathematical modeling, MATLAB® software was used to obtain different models of transfers functions in the "s" domain. The divers transfer function models are obtained represent the real extruder behavior. In the results, the best mathematical model is presented by estimation and validation of its parameters.

Key Words: mathematical modeling, transfer function, extruder

1. INTRODUÇÃO

A modelagem matemática, também conhecida como "identificação de sistemas", é uma área do conhecimento da teoria de controle que consiste em estudar, representar e

aplicar modelos matemáticos na representação do comportamento de sistemas reais, ou seja, obter uma função transferência que represente o mesmo (AGUIRRE, 2003).

Segundo Aguirre (2003), a modelagem matemática pode ser classificada do tipo caixa-branca, caixa cinza ou caixa-preta. A modelagem caixa-branca é feita quando se conhece a fundo o sistema real em estudo, enquanto que na modelagem caixa-cinza é realizada quando se tem informações parciais. A modelagem caixa-preta é feita quando se tem somente como informação os sinais de entrada e saída, desconhecendo a estrutura no interior do sistema real.

Os sistemas reais podem ser representados por processos mecânicos, físicos e químicos que ocorrem nas plantas industriais. Dependendo da complexidade na dinâmica desses sistemas, os mesmos podem ser representados por modelos matemáticos lineares e não lineares (BILLINGS, 2013).

Uma das dificuldades de modelar matematicamente o comportamento de um sistema real é a presença da multivariabilidade, ou seja, a presença de muitas variáveis de entradas e saídas que interagem entre si. Os sistemas multivariaveis podem ser representados por modelos denominados de MIMO (*Multiple Imput and Multiple Output* – Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas). Muitas vezes, para facilitar o controle de um processo, um sistema MIMO pode ser simplificado em um sistema SISO (*Simple Input and Simple Output* – Única Entrada e Única Saída), o qual considera como perturbações a influência de outras variáveis descartadas na simplificação (GOODWIN *et. al*, 2000).

Para maior aprendizado e aquisição de conhecimento da disciplina de “Sistemas de Controle I”, este trabalho tem como objetivo fazer a modelagem caixa-preta de um estudo de caso real aplicado na indústria sendo utilizado um modelo SISO para a modelagem matemática. Isto é feito a partir dos dados de entrada e saída em tempo real coletados a partir dos sensores do mesmo.

Este artigo está estruturado em três partes: Desenvolvimento, resultados e conclusão. No desenvolvimento são apresentados os meios utilizados para a modelagem matemática. Nos resultados são apresentados os modelos matemáticos obtidos e seus respectivos parâmetros estimados. E finalmente, as considerações finais sobre a análise dos dados são apresentadas na conclusão.

2. METODOLOGIA

2.1 Sistema Real

O sistema real escolhido para este trabalho de modelagem matemática consiste em uma máquina extrusora de borracha que é utilizada no processo de fabricação de pneu de automóveis.

A máquina extrusora de borracha funciona pelo princípio da extrusão que é um processo mecânico de produção de materiais de forma contínua. Os materiais como polímeros e borrachas são os insumos que alimentam a máquina e passam através de uma matriz adquirindo assim a forma que foi pré-determinada pela estrutura da matriz projetada para o material (HARPER, 2003). A FIGURA 1 ilustra uma máquina extrusora.



FIGURA 1: MÁQUINA EXTRUSORA DE BORRACHA UTILIZADA DE FABRICAÇÃO DE PNEU.
FONTE: LEWTHWAITE (2015)

2.2 Método de Gauss-Newton

Para o processo de modelagem matemática caixa-preta da máquina extrusora de borracha foi utilizado o algoritmo de otimização Gauss-Newton na estimação dos parâmetros de funções transferências diferentes. Estes modelos matemáticos são aplicados como função objetivo do algoritmo.

O método de Gauss Newton é usado na resolução de problemas de mínimos quadrados não linear. Em comparação com método de Newton, tem a vantagem de não utilizar a informação da segunda derivada da função objetivo (BJÖRCK, 1996).

Este algoritmo visa minimizar a soma dos quadrados dos resíduos de forma interativa, sendo expressa por:

$$S = \sum_{i}^{n} r_i^2 \tag{1}$$

Onde *S* representa a soma residual; r_i os resíduos e *n* representa o número de resíduos ou o tamanho da amostra de dados de entrada *x* e saída *y*.

Os resíduos ($r = [r_1 \dots r_n]$) são calculados pela diferença do valor observado e do valor previsto sendo calculado pela seguinte equação:

$$r_i = y_i - f(x_i, \beta) \tag{2}$$

Onde y_i é o valor observado; x_i é o valor de entrada; $\beta = [\beta_1 \dots \beta_m]$ representam o conjunto de parâmetros que deseja estimar e $f(x_i, \beta)$ representa a função objetivo que calcula o valor previsto.

Inicialmente, o algoritmo de Gauss-Newton começa com $\beta^{(0)}$ inicial que no decorrer das iterações este será melhorado de forma a minimizar a função *S*. Os parâmetros β são ajustados a cada iteração por:

$$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} + \left(J_f^T J_f\right)^{-1} . J_f^T . r \tag{3}$$

onde J_f representa a matriz Jacobiana da função $f(x_i, \beta)$.

O algoritmo Gauss-Newton pode ser resumido pelo pseudocódigo representado na FIGURA 2.

Início: $escolha\ \beta^{(0)} \in \mathbb{R}^n, \quad t = 0\ (solução\ inicial)$
Enquanto $\nabla f\left(\beta^{(t)}\right) \neq 0,$
calcule:
$\beta^{(t+1)} = \beta^{(t)} + \left(J_f^T J_f\right)^{-1} . J_f^T . r$
$t = t + 1$
Fim − enquanto
Então: $\beta^{(t)}$ *é o ponto crítico*

FIGURA 2: PSEUDOCÓDIGO DO ALGORITMO GAUSS-NEWTON.
FONTE: OS AUTORES (2019)

2.3 Modelos Matemáticos

Para a modelagem matemática da máquina extrusora de borracha, foram utilizados quatro modelos de funções de transferência em termos da variável complexa "*s*" que estão representadas nas equações 4, 5, 6 e 7.

$$G_1(s) = \frac{\beta_1}{(1+\beta_2 s)} \tag{4}$$

$$G_2(s) = \frac{\beta_1 . e^{-\beta_3 s}}{(1+\beta_2 s)} \tag{5}$$

$$G_3(s) = \frac{\beta_1(1+\beta_4 s)}{(1+\beta_2 s)} \tag{6}$$

$$G_4(s) = \frac{\beta_1(1+\beta_4 s)e^{-\beta_3 s}}{(1+\beta_2 s)} \tag{7}$$

Onde β_1, β_2, β_3 e β_4 são os parâmetros das funções transferências que serão estimados. Estes modelos matemáticos são usados no aplicativo "*System Identification*" do software MATLAB® destinado a modelagem matemática.

3. RESULTADOS

Os dados de entrada e saída coletados da extrusora de borracha estão representados na FIGURA 3. No processo de modelagem matemática uma parte desses dados foi utilizada no processo de estimação dos parâmetros (β_1, β_2, β_3 e β_4) das equações 4 a 7, enquanto que uma outra parte foi usada no processo de validação das mesmas.

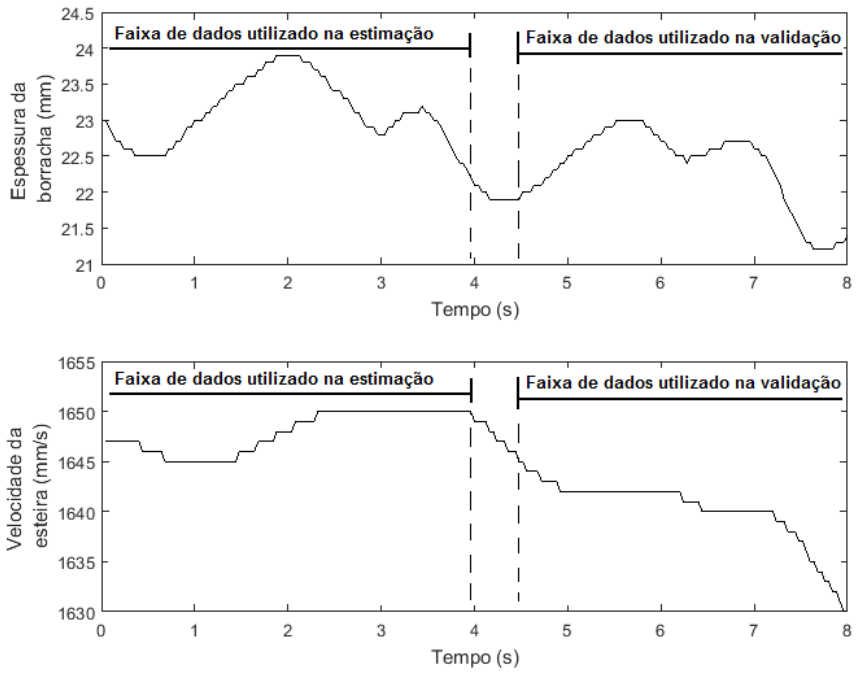

FIGURA 3: DADOS UTILIZADOS NO PROCESSO DE ESTIMAÇÃO E VALIDAÇÃO.
FONTE: OS AUTORES (2019)

Para a modelagem matemática, os dados da espessura da borracha representam os valores de entrada, enquanto que os dados de velocidade da esteira representam os valores de saída. Para análise da qualidade dos modelos obtidos foi usado MSE (*Mean Squared Error* - Erro Médio Quadrático). As ferramentas utilizadas foram: um computador com processador *intel i3* e 4 Gigas *bytes* de memória; software *Matlab®*.

3.1 Modelos Obtidos

Pode-se observar que na TABELA 1 alguns dos valores dos parâmetros estimados e o valor do MSE dos modelos matemáticos são muito próximos. As FIGURAS 4 e 5 mostram que os modelos matemáticos obtidos representam bem o comportamento da máquina extrusora de borracha. A representação do comportamento da extrusora de borracha pelo modelo matemático $G_3(s)$ foi ligeiramente superior aos demais, pois apresentou o menor valor do MSE.

TABELA 1 – Valores dos parâmetros obtidos dos modelos matemáticos $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$ no processo de estimação.

Modelo Matemático	β_1	β_2	β_3	β_4	MSE	Número de iterações
$G_1(s)$	71,593	12,068	-	-	0,08785	5
$G_2(s)$	71,591	12,053	0	-	0,08785	20
$G_3(s)$	71,592	12,067	-	0,010182	0,08705	5
$G_4(s)$	71,59	12,048	0,04	0,0405	0,08779	19

FONTE: OS AUTORES (2019).

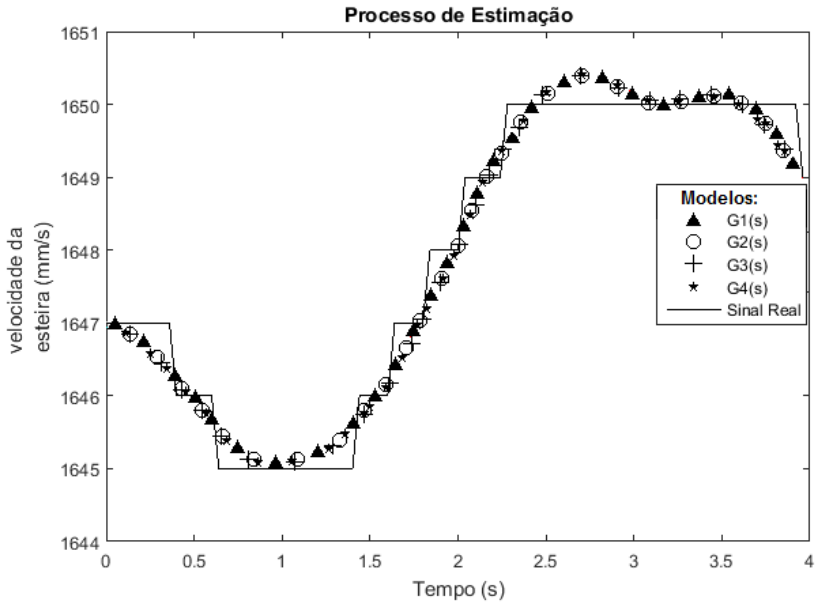

FIGURA 4: RESULTADO DA ESTIMAÇÃO DOS MODELOS $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$.
FONTE: OS AUTORES (2019).

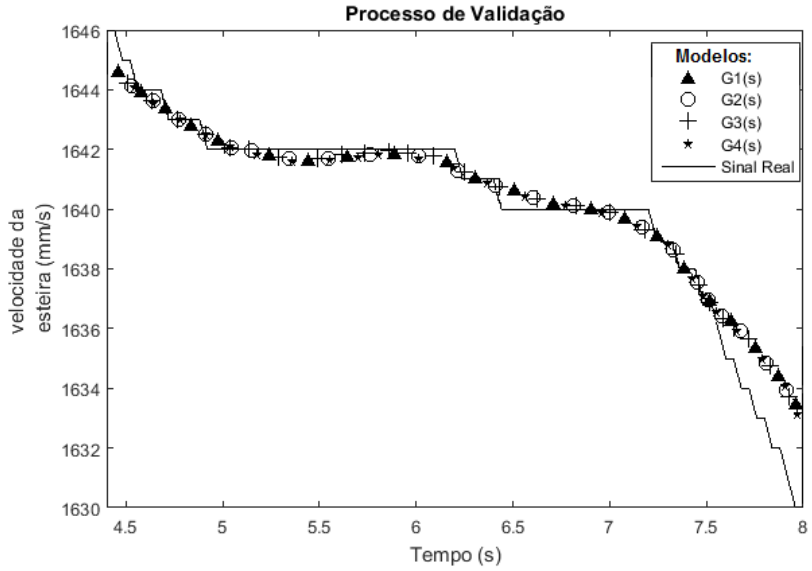

FIGURA 5: RESULTADO DA VALIDAÇÃO DOS MODELOS $G_1(s)$, $G_2(s)$, $G_3(s)$ e $G_4(s)$. FONTE: OS AUTORES (2019).

3. CONCLUSÃO

Todos os modelos matemáticos obtidos no processo de estimação representaram fielmente o comportamento da máquina extrusora de borracha, isto pode ser comprovado pelo processo de validação. Logo, os modelos obtidos podem ser utilizados em um futuro trabalho relacionado com o projeto de controladores.

Este trabalho reforçou os conhecimentos da disciplina de Sistema de Controle I sobre a representação de sistemas reais através de funções transferências. Certamente, este trabalho servirá aos alunos como material base de orientação para outros estudos em casos práticos encontrados na indústria.

4. REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas: Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais**. 2o ed. Belo Horizonte, 2004.

BILLINGS, S. A. **Nonlinear System Identification.** Chichester, UK, John Wiley & Sons, Ltd, 2013.

BJÖRCK, A. **Numerical methods for least squares problems**. SIAM, Philadelphia, 1996.

GOODWIN, G.; GRAEBE, S. F.; SALGADO, M. E. **Control System Design**. Valparaiso, Chile, 2000.

HARPER, C. A.; PETRIE, E. M. **Plastics Materials and Processes: A Concise Encyclopedia**. John Wiley & Sons, Ltd, New Jersey, 2013.

LEWTHWAITE, R**. A Guide to Rubber Extrusions.** J-FLEX, UK, 2015.